

1 –

a)

Ver soluções de outros exames, e.g., exame de 2ª época de 03/04.

(Note que há sobremodulação no sinal e logo ocorrem inversões de fase na portadora uma vez que, considerando o ganho do filtro, a modulante está compreendida entre +22 V e -2 V.)

b)

O espectro da onda triangular (sinal periódico) é um espectro discreto definido pelos coeficientes de Fourier (dados no formulário) e pela frequência da componente fundamental $f_1=1/T=1/(2 \times 10^{-3})=500$ Hz. É de salientar que as harmónicas pares têm amplitude nula, existindo apenas as harmónicas ímpares.

Em seguida há que atender ao efeito do filtro passa banda com largura de banda $B=2,5$ kHz centrado em 100 kHz, ou seja com banda passante no intervalo [98,75 kHz 101,25 kHz]. Uma vez que se tem $c_{-1}=c_1=4/\pi^2$, após o filtro de emissão de ganho 2 na banda passante, o espectro radiado será:

$$X_c(f) = 2 \times \left[A_c \cdot \mu \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{4}{\pi^2} \delta(f - 100,5 \times 10^3) + \frac{A_c}{2} \delta(f - 100 \times 10^3) + A_c \cdot \mu \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{4}{\pi^2} \delta(f - 99,5 \times 10^3) + \right. \\ \left. A_c \cdot \mu \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{4}{\pi^2} \delta(f - 99,5 \times 10^3) + \frac{A_c}{2} \delta(f - 100 \times 10^3) + A_c \cdot \mu \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{4}{\pi^2} \delta(f - 100,5 \times 10^3) \right]$$

Sendo $\mu=0,4$ e $A=3$, a representação gráfica deste sinal é trivial.

c)

É a potência da onda triangular, isto é

$$P = x_m(t) = \int_{T/2}^{T/2} x_m^2(t) dt = \int_{T/2}^{T/2} x_m^2(t) dt = \int_{T/2}^{T/2} A^2 \left(1 - \frac{4|t|}{T}\right)^2 dt = A^2 \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \left(1 - \frac{4t}{T}\right)^2 dt = 9 \text{ V}^2$$

d)

A potência obtêm-se usando o teorema de Parseval: $P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$, notando que neste caso os coeficientes a considerar aqui são os totais obtidos em b) e não apenas os da onda triangular em banda de base.

Dada a existência do filtro com largura de banda $B=2,5$ kHz, apenas são radiadas as riscas espectrais de 1ª (a de ordem 2 tem amplitude nula), sendo 3 em $f < 0$ e 3 em $f > 0$, como visto em b). O resultado fica:

$$P = 4 \times \left[4 \times \left(A_c \cdot \mu \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{4}{\pi^2} \right)^2 + 2 \times \left(\frac{A_c}{2} \right)^2 \right] = 4 \times \left[4 \times \left(5 \cdot 0,4 \cdot 1,5 \cdot \frac{4}{\pi^2} \right)^2 + \frac{25}{2} \right] = 23,65 + 50 = 73,65 \text{ W}$$

O 1º factor “4x” em evidência corresponde a $(|H_E(f)|)^2$.

e)

Não porque existe sobremodulação no sinal transmitido, $x_c(t)$. Uma vez que um detector de envolvente não conseguirá recuperar correctamente o sinal modulante, o dispêndio de potência ao radiar-se a portadora não trás qualquer benefício. Note-se que a fracção de potência útil é apenas $23,65\text{W}/73,65\text{W} = 32,1\%$. Este sinal só poderia ser correctamente desmodulado usando um desmodulador síncrono (mais complexo). Para que se pudesse beneficiar do facto de se poder usar um desmodulador de envolvente (mais simples que o síncrono) o índice de modulação μ teria de ser menor de forma a ter-se sempre $\mu x_m(t) < 1$, i.e., dever-se-ia usar $\mu < 1/3$.

f)

Ver acetatos das aulas teóricas de 03/04 (p. 9) ou o livro “Carlson” (pp. 409-410).

g)

Ver acetatos das aulas teóricas de 03/04 (p. 9) ou o livro “Carlson” (pp. 409-410).

2 –

a)

Para este caso em banda de base com impulsos de Nyquist com $\alpha=0,3$, a banda usada é

$$W = \frac{R_b}{2 \cdot \log_2(M)} (1 + \alpha) = \frac{R_b}{2 \cdot \log_2(M)} \times 1,3, \text{ vindo } R_{b \max} = \frac{W \times 2 \times \log_2(M)}{1,3}.$$

Logo, com $W=40$ kHz, tem-se:

$$M=2 \Rightarrow R_{b \max} = 61,5 \text{ kbit/s}; \quad M=4 \Rightarrow R_{b \max} = 123,1 \text{ kbit/s}; \quad M=8 \Rightarrow R_{b \max} = 184,6 \text{ kbit/s}.$$

b)

O espectro dos sinais não depende da M -aridade mas apenas do factor de excesso de banda do impulso de suporte dos símbolos de canal e da largura de banda usada ($W=40$ kHz). Assim apenas é necessário representar um filtro de Nyquist com $\alpha=0,3$ no intervalo

$$\text{desde } -\frac{R_s}{2}(1 + \alpha) = -40 \text{ kHz}$$

$$\text{a } \frac{R_s}{2}(1 + \alpha) = 40 \text{ kHz}$$

Como se tem

$$W = \frac{R_s}{2} \times 1,3 = 40 \text{ kHz},$$

então

$$\frac{R_s}{2} = \frac{40 \times 10^3}{1,3} = 30,77 \text{ kHz}.$$

Este valor é independente de M . O ritmo de símbolos no canal, R_s , está directamente relacionado com a banda. O factor $\log_2(M)$ só interviria se se quisesse saber o ritmo de bits de informação para um dado M .

(Bastaria representar graficamente o espectro de Nyquist para as frequências positivas.)

c)

A potência de ruído é $\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df$. Como a cadeia total terá uma formatação de Nyquist o filtro de recepção é da forma $\sqrt{Nq(f)}$, e logo o integral anterior é a integração de um filtro de Nyquist, cujo valor é independente do factor de excesso de banda α . A banda equivalente do filtro será

$$W_{eq} = \frac{R_s}{2}, \text{ calculado na alínea anterior.}$$

Assim, $\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} \times (2W_{eq}) = (10^{-4} \text{ W/Hz}) \times (2 \times 30,77 \times 10^3 \text{ Hz}) = 6,15 \text{ W} \leftrightarrow 10 \log_{10}(4W/1W) \approx 7,9 \text{ dB}_W$.

d)

Com uma largura de banda $W=40 \text{ kHz}$, um ritmo binário $R_b=120 \text{ kbit/s}$ só pode ser alcançado com $M=4$ ou $M=8$, como se viu em a). Tendo de optar entre estes dois esquemas deve optar-se pelo código de linha quaternário pois tem um melhor desempenho em termos de potência (necessita de menor E_b/N_0 para garantir as mesmas P_b).

A largura de banda necessária é

$$W = \frac{R_b}{2 \cdot \log_2(M)} (1 + \alpha) = \frac{120 \times 10^3}{2 \cdot \log_2(4)} \times 1,3 = 39 \text{ kHz}$$

Através da curva de BER para $M=4$ dada no formulário observa-se que se deve ter no $E_b/N_0 \geq 11 \text{ dB}$.

Mas
$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{S}{N} \cdot \frac{B}{R_b}$$

vindo
$$\frac{S}{N} [\text{dB}] = \frac{E_b}{N_0} [\text{dB}] + 10 \log_{10} \left(\frac{R_b}{B} \right) [\text{dB}] =$$
$$= 11 \text{ dB} + 10 \log_{10} \left(\frac{120 \times 10^3}{39 \times 10^3} \right) = 11 \text{ dB} + 4,88 \text{ dB} = 15,88 \text{ dB}.$$

(Note-se que R_b/B é a eficiência espectral.)

e)

Através das curvas de BER dadas no formulário conclui-se que tendo $E_b/N_0=8\text{dB}$ o único dos 3 esquemas que permite uma transmissão com $P_b \leq 10^{-3}$ é o binário. Assim o ritmo binário máximo é o obtido em a), i.e, $R_{b\text{máx}} = 61,5 \text{ kbit/s}$.

f)

Com impulsos de Manchester as curvas de BER são as mesmas. Assim a conclusão de e) acerca do esquemas a usar será a mesma: só o esquema com $M=2$ permite alcançar uma transmissão com $P_b \leq 10^{-3}$. No entanto o ritmo máximo está limitado a um valor inferior que com impulsos de Nyquist pois o espectro dos sinais com impulsos de suporte de Manchester é superior (na verdade é infinito). Considerando uma limitação ao lobo principal do espectro do código de linha Manchester binário, isto é, considerando $W=2R_b$, o ritmo máximo para $W=40 \text{ kHz}$ é $R_{b\text{máx}}=20 \text{ kbit/s}$.

3 –

a)

Subentendendo o uso da base ortonormada (i.e. com funções de base ortogonais e de norma unitária)

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos(\omega_c t), \quad \psi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{T_s}} \sin(\omega_c t).$$

Em BPSK ($M=2$) tem-se $E_s = \|\mathbf{s}_1\|^2 = \|\mathbf{s}_2\|^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \Rightarrow D^2 = 4E_s$,

mas como $E_s=E_b$, obtém-se $D^2 = 4E_b$.

Em QPSK ($M=4$) tem-se: $E_s = \|\mathbf{s}_1\|^2 = \|\mathbf{s}_2\|^2 = \|\mathbf{s}_3\|^2 = \|\mathbf{s}_4\|^2 = (\sqrt{2}s_{11})^2 = \left(\sqrt{2}(D/2)\right)^2 \Rightarrow D^2 = 2E_s$.

Sendo a relação entre as energia de bit e de símbolo dada por

$$E_b = \frac{E_s}{\log_2 M}$$

então em QPSK também se tem $D^2=4E_b$.

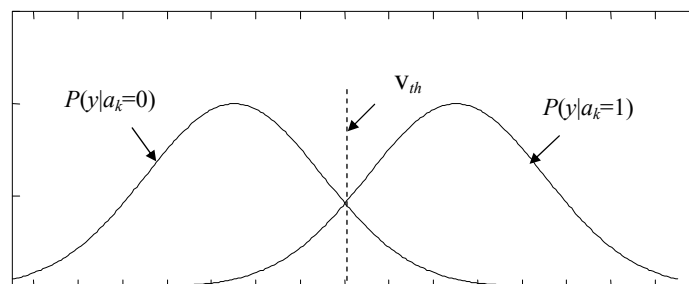
b)

A probabilidade de erro é em BPSK é $P_b=0,5P(\varepsilon|1)+0,5P(\varepsilon|0)$, que, como os bits são equiprováveis, se reduz a $P_b = P(\varepsilon|1) = P(\varepsilon|0)$. Esta probabilidade de erro de símbolo é dada pelo integral impróprio de uma gaussiana de variância σ^2 desde o limiar de decisão v_{th} até ao infinito (ver figura abaixo).

$$P_b = Q\left(\frac{d_{\text{limiar}}}{\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{d_{\text{limiar}}^2}{\sigma^2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{(D/2)^2}{N_0/2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{D^2}{N_0/2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{4E_b}{N_0/2}}\right) = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

tendo sido usado nesta dedução o conhecimento de que

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt = \frac{N_0}{2}.$$



A probabilidade de símbolo é em QPSK é $P_s=0,5P(\text{erro em fase})+0,5P(\text{erro em quadratura})$, ou seja, para cada símbolo, é a probabilidade de se errar detectando um dos seus vizinhos, desprezando a probabilidade de errar para o símbolo diametralmente oposto. A expressão reduz a $P_s = P(\text{erro em fase}) = P(\text{erro em quadratura})$, que se obtém da mesma forma que em BPSK. Por fim, $P_b = P_s$ considerando um mapeamento de Gray, isto é, o erro de um símbolo conduz à decisão errónea de apenas um bit. Assim,

$$P_b \cong Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right)$$