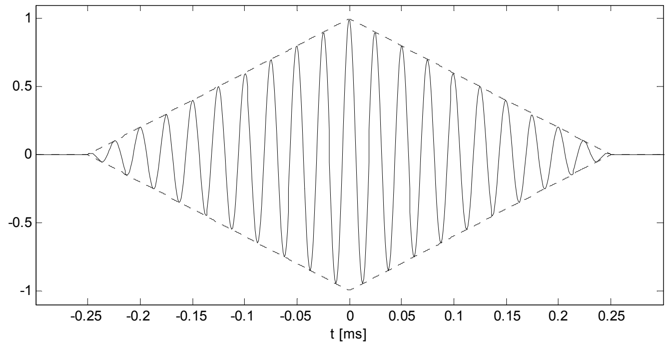
ISCTE – Licenciatura em Engenharia de Telecomunicações e Informática
Solução do Exame de 1ª Época de Modulação e Codificação
Ano lectivo 03/04, 29/06/2004

1- a) O sinal é

$$i_c(t) = \text{tri}\left(\frac{t}{0{,}25\times 10^{-3}}\right)\cos(2\pi 40\times 10^{3} t)$$

sendo a sua representação gráfica a seguinte:



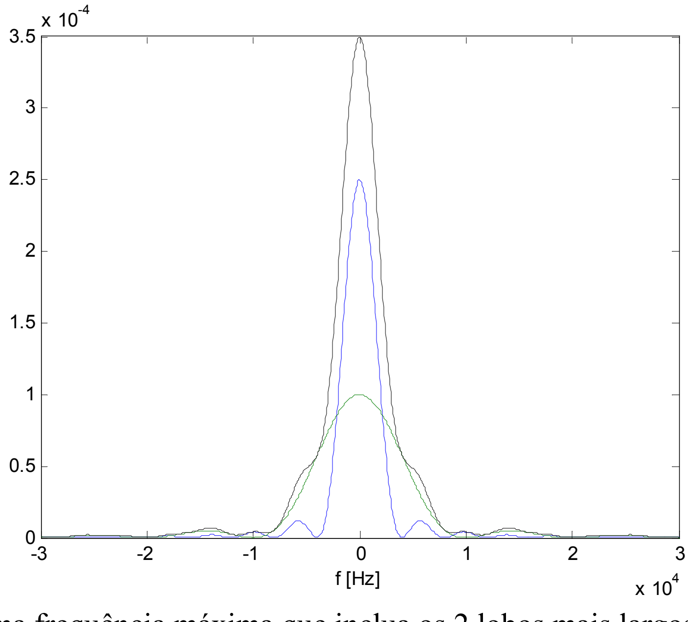
b)
Na figura abaixo então representados os módulos dos espectros dos dois sinais de informação, sendo eles

$$I(f) = TF\left\{\text{tri}\left(\frac{t}{0{,}25\times 10^{-3}}\right)\right\} = 0{,}25\times 10^{-3}\,\text{sinc}^2(f\times 0{,}25\times 10^{-3})$$

e

$$Q(f) = TF\left\{\text{tri}\left(\frac{t}{0{,}1\times 10^{-3}}\right)\right\} = 0{,}1\times 10^{-3}\,\text{sinc}^2(f\times 0{,}1\times 10^{-3}),$$

assim como a sua soma: $I(f) + Q(f)$



Deve ser considerada uma frequência máxima que inclua os 2 lobos mais largos (i.e., os de $Q(f)$).
Após a multiplicação pelas respectivas portadoras tem-se

$$X_c(f) = \frac{1}{2}I\left(f - 40\times10^3\right)\frac{1}{2}I\left(f + 40\times10^3\right) + \frac{1}{2}Q\left(f - 40\times10^3\right)e^{-j\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}Q\left(f + 40\times10^3\right)e^{+j\frac{\pi}{2}}$$

O módulo deste espectro é composto pela soma de dois espectros da figura anterior mas centrados em +40 kHz e em −40 kHz. A fase deste espectro deve ser também representada.
(Note-se que aqui $Q(\cdot)$ não é a função usualmente definida e usada no contexto do cálculo de probabilidades de erro em comunicações digitais!)

c)
No ramo em quadratura tem-se, após o oscilador local
$i(t)\cos^2(2\pi f_c t) = \frac{1}{2}i(t) + \frac{i(t)}{2}\cos(4\pi f_c t)$ que após o FPB fica $i_D(t)\frac{1}{2}i(t)$
No ramo em fase tem-se, após o oscilador local
$q(t)\mathrm{sen}^2(2\pi f_c t) = \frac{1}{2}q(t) - \frac{q(t)}{2}\cos(4\pi f_c t)$ que após o FPB fica $q_D(t)\frac{1}{2}q(t)$
Nos dois percursos cruzados têm-se
$i(t)\cos(2\pi f_c t)\mathrm{sen}(2\pi f_c t) = \frac{1}{2}i(t)\left[\mathrm{sen}(0) + \mathrm{sen}(4\pi f_c t)\right] = \frac{1}{2}i(t)\mathrm{sen}(4\pi f_c t)$ que é eliminado totalmente no FPB
No outro percurso cruzado acontece o mesmo, isto é
$q(t)\mathrm{sen}(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c t) = \frac{1}{2}q(t)\left[\mathrm{sen}(0) + \mathrm{sen}(4\pi f_c t)\right] = \frac{1}{2}i(t)\mathrm{sen}(4\pi f_c t)$ que é eliminado totalmente no FPB. **Q.E.D.**

2- a)
Em FM, pela banda de Carson $B_{RF} = 2\times\left(\Delta f_{\max} + f_{\max}\right) = B_{RF} = 2\times(3+8) =$ 22 MHz
Em DSB: B_{RF} = 2×8= 16 MHz
Em SSB: B_{RF} = 8 MHz

b) O ritmo de amostras do sinal tem de ser $f_a \geq$ 16 MHz, pelo critério de Nyquist. Sendo cada amostra codificada com 16 bits, tem-se R_b = 16 MHz × 16 bits = 256 Mbit/s
Em M-QAM tem-se $B_{RF} = \frac{R_b}{\log_2(M)}(1+\alpha) = \frac{256\times10^6}{\log_2(128)}(1+0{,}1) =$ 40,23 MHz

c) Pelo critério de Nyquist os dois sinais de TV precisam cada um de ser amostrados a 16 MHz. O terceiro sinal necessita de ser amostrado a 32 MHz.
O *multiplexer* deverá ter as 5 entradas, cada uma com f_a= 16 MHz, ligadas da seguinte forma:
1- sinal TV_1;
2- sinal TV_2;
3- sinal de 15 MHz;
4- sinal de 15 MHz (pois deve entrar duas vezes para que se seja amostrado a 32 MHz);
5- *marker*.
O ritmo de símbolos (amostras) à saída do multiplexer é R= 5×16= 80 Baud.

3- a) O receptor óptimo é constituído por:
- um filtro adaptado ao impulso de suporte $r(t)$, isto é, com uma de resposta impulsional $h(t) = r(\tau - t)$ (ou pelo seu correlador equivalente);

- um amostrador no instante óptimo de amostragem $t_0+kTb,\ k\in N$;
- um comparador com o limiar óptimo de detecção $v_{th}=0$.

b) Para esta transmissão binária (M=2) a curva geral para a BER fica simplesmente

$$P_b=Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Para se ter $P_b<10^{-4}$ deve ter-se $Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right)<10^{-4}$. Assim o argumento da função, pela observação do gráfico de $Q(x)$, deverá ser $\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}>3{,}7$. Mas $\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}>3{,}7 \Leftrightarrow \sqrt{2\frac{P}{N}\frac{B}{R_b}}>3{,}7$, e logo deve ter-se $R_b<2\frac{P\cdot B}{N}\cdot\frac{1}{3{,}7^2}$, vindo $R_b<300$ kbit/s.

c) A largura mínima para esta transmissão em banda de base é

$$W=\frac{R_b}{2\cdot\log_2(M)}(1+\alpha).$$

Para M=2 a banda mínima possível (i.e., com α=0) fica

$$W=\frac{R_b}{2}=150 \text{ kHz}.$$

(Note-se que se consideram sempre apenas as frequências positivas para efeito da contabilização da largura de banda e daí o factor ½ de diferença para o caso dos sinais modulados em QAM ou PSK.)
Estão a ser considerados os impulsos de Nyquist pois com eles consegue-se efectuar a transmissão numa banda finita que é a mínima possível e sem introduzirem interferência intersimbólica nos instantes óptimos de decisão.

d) Dever-se-ia aumentar a M-aridade aumentando a eficiência espectral da transmissão até que a banda disponível fosse suficiente. (Para compensar a penalização introduzida no desempenho de potência seria de considerar a adição de codificação de canal).

4- a) $H= 0{,}4\times\log_2(0{,}4^{-1}) + 0{,}3\times\log_2(0{,}3^{-1})+ 0{,}2\times\log_2(0{,}2^{-1}) + 0{,}1\times\log_2(0{,}1^{-1}) = 1{,}846$ bits
vindo $R_b= H\times R_s= 1{,}846\times 2000 = 3692$ bits/s

b) Obtendo as palavras de código dadas pelo algoritmo de Shannon-Fano (não apresentado aqui) vai ter-se: s_1-1 bit, s_2-2 bit; s_3-3 bits; s_4-3 bits, vindo $\overline{N_b}=1{,}9$ bits.
Com codificação de Shannon-Fano a eficiência da codificação é:

$$\eta_{S-H}=\frac{H}{\overline{N_b}}=\frac{1{,}846}{1{,}9}=97{,}2\%$$

c) Obtendo as palavras de código dadas pelo algoritmo de Huffman (não apresentado aqui) tem-se: s_1-1 bit, s_2-2 bit; s_3-3 bits; s_4-3 bits, vindo também $\overline{N_b}=1{,}9$ bits.
Logo, a eficiência da codificação com codificação de Huffman é

$$\eta_H=97{,}2\%$$

Comentário: é sabido que se tem sempre $\eta_{S\text{-}F}\le\eta_H$. Neste caso os dois algoritmos conduziram a códigos equivalentes.